Л 10. Производные и дифференциалы высших порядков. Частные производные

Цель лекции: познакомить студентов с понятием производных высших порядков, правилами их вычисления, дифференциалами высших порядков и основными теоремами дифференциального исчисления. Ввести понятие частных производных и показать их смысл и применение.

Основные вопросы

- Производная первого и высших порядков.
- Правила вычисления производных высших порядков.
- Формула Лейбница.
- Дифференциалы высших порядков.
- Теорема Ферма об экстремуме.
- Теоремы Ролля, Коши и Лагранжа.
- Правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей.

Краткое содержание: лекция посвящена производным высших порядков, правилам их вычисления, включая формулу Лейбница для производной произведения. Рассматриваются дифференциалы высших порядков и связь дифференциала с производной. Изучаются классические теоремы дифференциального исчисления — Ферма, Ролля, Коши и Лагранжа — и их применение. Показано использование правила Лопиталя для вычисления пределов.

Производная $y' = f'(x)$ называется еще первой производной функции $y = f(x)$ или производной первого порядка, сама функция $y = f(x)$ называется производной нулевого порядка.

Определение. Производной k–го порядка функции называется производная от ее производной $(k-1)$ порядка при условии, что эти производные существуют

$$f^{(k)}(x) = \left(f^{k-1}(x)\right)', \qquad k = 1,2,3,...$$

функция f при этом называется k раз дифференцируемой.

Пример. Дано $y = a^x$. 1-ая производная $f'(x) = a^x \cdot \ln a$,

2-ая производная $f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(a^x \cdot \ln x\right)' = a^x \cdot (\ln a)^2$,

3-ая производная $f'''(x) = \left(f''(x)\right)' = \left(a^x \cdot (\ln a)^2\right)' = a^x \cdot (\ln a)^3$.

Следовательно, $f^{(k)}(x) = a^x (\ln a)^k$, $k = 0,1,2,...$

Эта функция бесконечно дифференцируема для $\forall x \in R$, т.е. она имеет производные всех порядков. Для суммы и произведения $k-$ раз дифференцируемых функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ справедливы следующие правила дифференцирования $(k = 1,2,3,...)$.

1. $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$, $(f+C)^{(k)} = f^{(k)}$.

2. Формула Лейбница:

$$(f\cdot g)^{(k)}=f^{(k)}g(x)+kf^{(k-1)}(x)g'(x)+\frac{k(k-1)}{2}f^{(k-2)}(x)\cdot g''(x)+$$
$$+\ldots+\frac{k!}{m!(k-m)!}f^{(k-m)}(x)\cdot g^{(m)}(x)+\ldots+k\cdot f'(x)\cdot g^{(k-2)}(x)+f(x)\cdot g^{(k)}(x)=$$
$$=\sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!\cdot(k-m)!}f^{(k-m)}(x)\cdot g^{(m)}(x)\qquad\qquad (Cf)^{(k)}=Cf^{(k)}$$

Без доказательства.

Определение. Дифференциалом k–го порядка называется дифференциал от ее дифференциала $k-1$ – го порядка $d^k f=d(d^{k-1}f)$, вычисленный в предположении, что dx остается постоянной.

Получаем формулы для вычисления такого дифференциала:

$$df=f'(x)dx,$$
$$d^2 f=d(df)=(f'(x)dx)'dx=f''(x)(dx)^2,$$
$$d^3 f=d(d^2 f)=(f''(x)(dx)^2)'dx=f'''(x)(dx)^3,$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$d^k f=f^{(k)}(x)(dx)^k.$$

Из последней формулы имеем еще одно обозначение для производной k–го порядка. Для дифференциалов k–го порядка также справедливы следующие правила:

1) $d^k(f+g)=d^k f+d^k g,\quad d^k(f+C)=d^k f$.

2) $d^k(f\cdot g)=\sum\limits_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!\cdot(k-m)!}d^{k-m}f\cdot d^m g$, $d^k(C\cdot f)=Cd^k f$

Определение. Точка x_0 называется точкой минимума (максимума) функции, $y=f(x)$, если она определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ этой точки и для $\forall x\in U(x_0)\Rightarrow f(x)\ge f(x_0)\quad (f(x)\le f(x_0))$.

Значение $f(x_0)$ в этом случае называется минимумом (максимумом) функции. Точки минимума и максимума называются экстремальными точками, а соответствующие значения функции–экстремумами.

Теорема Ферма. Пусть x_0– точка минимума, т.е. $f(x)\ge f(x_0)$ для $\forall x\in U(x_0)$.

Тогда для $x>x_0\Rightarrow \Delta f=f(x)-f(x_0)\ge 0$, $\Delta x=x-x_0>0$ и $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\ge 0$.

Для $x<x_0\Rightarrow \Delta f=f(x)-f(x_0)\ge 0,\quad \Delta x=x-x_0<0$ и $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\le 0$.

Следовательно, $f'(x_0)=0$.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна на этом отрезке и имеет производную во всех точках интервала (a,b).

Для таких функций кроме теорем Больцано–Коши и Вейерштрасса справедливы еще следующие теоремы.

Теорема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и принимает на его концах равные значения: $f(a) = f(b)$. Тогда $\exists c \in (a,b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что при выполнении ее условий $\exists c \in (a,b)$, в которой касательная к графику функций параллельна оси Ox и хорде, соединяющей концы графика на отрезке $[a,b]$.

Теорема Коши. Пусть функция $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы на $[a,b]$ и $g'(x) \neq 0$ для $x \in (a,b)$. Тогда $\exists c \in (a,b)$ такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Следующая теорема является прямым следствием теоремы Коши, однако, в силу ее широкого применения имеет специальное название.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на $[a,b]$. Тогда в интервале $\exists c \in (a,b)$: $\dfrac{\mathrm{f(b) - f(a)}}{\mathrm{b - a}} = \mathrm{f'(c)}$.

Следствие 1. Возьмем $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$, тогда при выполнении условий теоремы Лагранжа в отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ будем иметь $\Delta f = f'(c) \cdot \Delta x$, где $c \in (x_0, x_0 + \Delta x)$.

Это c можно записать в виде $C = x_0 + \theta \cdot \Delta x$, где $\theta \in (0,1)$.

Тогда приращение функции записывается в виде $\Delta f = f'(x_0 + \theta \Delta x)\Delta x$ или в общем виде $f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a)$.

Следствие 2. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема и $\forall x \in (a,b) \Rightarrow f'(x) = 0$, тогда эта функция постоянна в (a,b), т. е. $f(x) = c$.

Правило Лопиталя. Это правило дает возможность вычислять пределы дифференцируемых функций вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ с использованием производных.

Теорема. Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ две б.м. или б.б. при $x \to a$ функции, дифференцируемые в $U(a) \setminus \{a\}$ и пусть $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$ в $U(a) \setminus \{a\}$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim\limits_{\mathrm{x \to a}} \dfrac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}}$ и они равны: $\lim\limits_{\mathrm{x \to a}} \dfrac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}} = \lim\limits_{\mathrm{x \to a}} \dfrac{\mathrm{f'(x)}}{\mathrm{g'(x)}}$.

Аналогичные утверждения справедливы для $x \to +\infty, x \to -\infty, x \to \infty, x \to a-, x \to a+$, а также для случая, когда $f'(x), g'(x)$ является б.б.

Пример.

$$\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} (-x) = 0$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x-\frac{1}{x})=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(-x\sin x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

3. Функция $y=f(x)^{g(x)}$ типа (1^{∞}) или (0^{0}) записывается в виде $y=e^{g(x)\ln f(x)}$, затем вычисляется $\lim\limits_{x\to 0}g(x)\ln f(x)=A$ типа $(\infty\cdot 0)$.

Если A – число, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{A}$.

Если $A=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=(e^{+\infty})=\infty$.

Если $A=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{(x)}=(e^{-\infty})=0$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют производной n-го порядка?
2. Как вычисляется производная степени и произведения функций высших порядков?
3. Запишите формулу Лейбница.
4. Что называют дифференциалом второго и третьего порядка?
5. Как определить точку минимума или максимума по теореме Ферма?
6. Сформулируйте теорему Ролля.
7. Сформулируйте теорему Лагранжа.
8. В чём состоит правило Лопиталя?
9. Какие неопределённости можно раскрывать с помощью правила Лопиталя?
10. Что обозначает частная производная функции двух переменных?

Литература

1. Махмеджанов Н., Махмеджанова Р.Н. Сборник задач по высшей математике. – 2009. – 408 стр
2. Н.М. Махмеджанов. Сборник заданий по высшей математике. Алматы: «Қазақ Университеті», 2021
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, 2005. Т.1. Т.2.
4. Демидович Сборник задач по математическому анализу